

# Chapitre XIII : Fractions rationnelles

---

Retranscrit par Samy Youssoufine

27 mars 2026

**UM6P**

University  
Mohammed VI  
Polytechnic

**EMINES**  
School of Industrial Management



**Note importante**

Peut contenir des erreurs ou des sections incomplètes.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Corps de fractions d'un anneau intègre</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Corps des fractions de l'anneau <math>\mathbb{K}[X]</math></b>	<b>7</b>
2.1	Degré d'une fraction rationnelle . . . . .	7
2.2	Fraction dérivée . . . . .	9
2.3	Zéros et pôles d'une fraction rationnelle . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Décomposition en éléments simples (DES) d'une fraction rationnelle</b>	<b>13</b>
3.1	Généralités . . . . .	13
3.2	Décomposition en éléments simples (cas général) . . . . .	15
3.3	Techniques de décomposition en éléments simples . . . . .	18
3.3.1	Méthode par pôles simples . . . . .	18
3.4	Méthode par pôles doubles . . . . .	20
3.4.1	Pôles de multiplicité supérieure ou égale à 3 . . . . .	21

Ce chapitre est consacré aux fractions rationnelles. Nous allons introduire les fractions rationnelles, en construisant un corps de fractions à partir d'un anneau commutatif intègre. Nous allons ensuite étudier les propriétés de ces fractions rationnelles, notamment leur simplification et leurs applications.

# 1 Corps de fractions d'un anneau intègre

Soit  $A$  un anneau intègre commutatif. On souhaite construire le plus petit corps  $\mathbb{K}$  contenant l'anneau  $A$ , qu'on appellera corps de fractions de  $A$ .

## Exemple 1.1.0.1

Par exemple, si  $A = \mathbb{Z}$ , alors le corps de fractions de  $A$  est  $\mathbb{Q}$ , le corps des nombres rationnels.

$$Q = \left\{ \frac{N}{D} \mid N \in \mathbb{Z}, D \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

L'écriture  $\frac{N}{D}$  n'est pas unique. En effet...

$$\frac{N}{D} = \frac{N'}{D'} \iff ND' = N'D$$

Nous allons donc construire une classe d'équivalence pour résoudre ce problème d'unicité d'écriture.

## Propriété 1.1.0.1

Soit  $A$  un anneau intègre commutatif. On définit une relation d'équivalence sur  $A \times A^*$  par :

$$(N, D) \sim (N', D') \iff ND' = N'D$$

Cette relation est bien une relation d'équivalence.

## Attention

$A^*$  désigne ici  $A \setminus \{0_A\}$  et non pas  $\mathbb{U}_A$  (l'ensemble des éléments inversibles de  $A$ ).

## Preuve

- ▶ Réflexivité :  $ND = ND$  pour tout  $(N, D) \in A \times A^*$ .
- ▶ Symétrie : Si  $ND' = N'D$ , alors  $N'D = ND'$ , donc  $(N', D') \sim (N, D)$  (la relation  $\sim$  est symétrique).

► Transitivité :

- ▷ Si  $(N, D) \sim (N', D')$  et  $(N', D') \sim (N'', D'')$ , alors  $ND' = N'D$  et  $N'D'' = N''D'$ .
- ▷ En multipliant la première égalité par  $D''$  et la seconde par  $D$ , on obtient  $ND'D'' = N'DD''$  et  $N'DD'' = N''DD'$ .
- ▷ En combinant ces égalités, on trouve  $ND'D'' = N''DD'$ , ce qui implique que  $ND'' = N''D$  (car  $A$  est intègre).
- ▷ Ainsi,  $(N, D) \sim (N'', D'')$ .

■

### 📖 Définition 1.1.0.1

Dans la suite, on pose :

$$\mathbb{K} = \{\mathcal{C}l(N, D) \text{ tel que } (N, D) \in A \times A^*\}$$

### ✅ Propriété 1.1.0.2

$$\begin{cases} \mathcal{C}l(N, D) = \mathcal{C}l(N', D') \\ \mathcal{C}l(A, B) = \mathcal{C}l(A', B') \end{cases} \implies \begin{cases} \mathcal{C}l(NB + AD, BD) = \mathcal{C}l(N'B' + A'D', B'D') \\ \mathcal{C}l(AN, BD) = \mathcal{C}l(A'N', B'D') \end{cases}$$

### 🔍 Preuve

- Montrons que  $\mathcal{C}l(NB + AD, BD) = \mathcal{C}l(N'B' + A'D', B'D')$ .
  - ▷ En utilisant les égalités  $\mathcal{C}l(N, D) = \mathcal{C}l(N', D')$  et  $\mathcal{C}l(A, B) = \mathcal{C}l(A', B')$ , on a  $ND' = N'D$  et  $AB' = A'B$ .
  - ▷ En multipliant la première égalité par  $B$  et la seconde par  $D$ , on obtient  $NDB = N'DB$  et  $ABD = A'BD$ .
  - ▷ En combinant ces égalités, on trouve  $NB + AD = N'B' + A'D'$  et  $BD = B'D'$ .
- Montrons que  $\mathcal{C}l(AN, BD) = \mathcal{C}l(A'N', B'D')$ .
- En utilisant les mêmes égalités, on a  $AN = A'N'$  et  $BD = B'D'$ , ce qui implique que  $\mathcal{C}l(AN, BD) = \mathcal{C}l(A'N', B'D')$ .

■

### 📖 Définition 1.1.0.2

On munit  $\mathbb{K}$  des opérations suivantes :

- Addition  $+$  :  $\mathcal{C}l(N, D) + \mathcal{C}l(N', D') = \mathcal{C}l(NB + AD, BD)$ .

► Multiplication  $\times : \mathcal{C}l(N, D) \cdot \mathcal{C}l(N', D') = \mathcal{C}l(NN', DD')$ .

### ✓ Propriété 1.1.0.3

Avec les opérations  $+$  et  $\times$  définies ci-dessus,  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif.

Dans la suite de ce cours, on notera  $\frac{N}{D} = \mathcal{C}l(N, D)$

$$\mathbb{K} = \left\{ \frac{N}{D} \text{ tel que } (N, D) \in A \times A^* \right\}$$

### 🗨 Remarque 1.1.0.1

- La définition des lois  $+$  et  $\times$  dans  $\mathbb{K}$  provient des mêmes lois définies sur  $\mathbb{Q}$  (le corps de fractions de  $\mathbb{Z}$ ).
- Dans  $\mathbb{K}$ , on a  $0_{\mathbb{K}} = \mathcal{C}l(0_A, 1_A) = \frac{0_A}{1_A}$  et  $1_{\mathbb{K}} = \mathcal{C}l(1_A, 1_A) = \frac{1_A}{1_A}$ .

### 🔍 Preuve

- On remarque que  $\frac{N}{D} = \frac{ND'}{DD'}$  et  $\frac{N'}{D'} = \frac{N'D}{DD'}$ .
- On peut donc supposer que les “fractions” sont écrites avec un dénominateur commun.
- Les lois  $+$  et  $\times$  sont déjà définies d’après la remarque précédente.
- Il ne reste plus qu’à vérifier que  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif.
  - ▷ L’addition est associative et commutative, avec  $0_{\mathbb{K}}$  comme élément neutre. On utilise les propriétés de l’addition dans  $A$  (car  $A$  est un anneau commutatif) pour vérifier ces propriétés dans  $\mathbb{K}$ .
  - ▷ La multiplication est associative et commutative, avec  $1_{\mathbb{K}}$  comme élément neutre. On utilise les propriétés de la multiplication dans  $A$  pour vérifier ces propriétés dans  $\mathbb{K}$ .
  - ▷ La multiplication est distributive par rapport à l’addition. On utilise les propriétés de l’addition et de la multiplication dans  $A$  pour vérifier cette propriété dans  $\mathbb{K}$ .
  - ▷ Tout élément nul de  $\mathbb{K}$  est de la forme  $\frac{0_A}{D}$ , ce qui correspond à  $0_{\mathbb{K}}$ . Tout élément non nul de  $\mathbb{K}$  est de la forme  $\frac{N}{D}$  avec  $N \neq 0_A$ , et son inverse est  $\frac{D}{N}$ , qui est bien défini car  $A$  est intègre (et on démontre facilement que  $\frac{N}{D} \cdot \frac{D}{N} = 1_{\mathbb{K}}$ ).

On conclut que  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif. ■

✓ **Propriété 1.1.0.4 (Injection canonique de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ )**

$$f : \begin{matrix} A \rightarrow \mathbb{K} \\ N \mapsto \frac{N}{1_A} \end{matrix}$$

$f$  est un morphisme d'anneaux injectif.

🔍 **Preuve**

On peut procéder par deux méthodes, soit en montrant que le noyau  $\ker(f) = \{0_A\}$  (par équivalences successives sans avoir à passer par une double inclusion), soit en montrant que  $f$  est injective directement (en étudiant l'égalité  $f(N) = f(N')$  avec  $N, N' \in A$ ). ■

💬 **Remarque 1.1.0.2**

Par conséquent, on peut identifier  $A$  à son image  $f(A)$  dans  $\mathbb{K}$ . Et  $f : A \rightarrow f(A)$  est un isomorphisme d'anneaux.  $A$  est donc isomorphe à  $f(A)$ , qui est un sous-anneau de  $\mathbb{K}$ . Ainsi, on peut considérer  $A$  comme un sous-anneau de  $\mathbb{K}$ , et on dit que  $\mathbb{K}$  est un corps de fractions de  $A$ .

★ **Théorème 1.1.0.1**

$\mathbb{K}$  est le plus petit corps contenant  $A$ .  
 $\mathbb{K}$  est appelé **le corps de fractions** de  $A$ .

🔍 **Preuve**

Soit  $L$  un corps contenant  $A$ . On souhaite montrer que  $\mathbb{K} \subseteq L$ .

- ▶ Soit  $\frac{N}{D} \in \mathbb{K}$  avec  $N \in A$  et  $D \in A^*$ . Comme  $L$  est un corps contenant  $A$ , on a  $N \in L$  et  $D \in L^*$  (car  $D$  est non nul dans  $A$ , il est aussi non nul dans  $L$ ).
- ▶ Par conséquent,  $\frac{N}{D} = N \cdot D^{-1} \in L$ .
- ▶ Ainsi, tout élément de  $\mathbb{K}$  est aussi un élément de  $L$ , ce qui implique que  $\mathbb{K} \subseteq L$ . ■

# 2 Corps des fractions de l'anneau $\mathbb{K}[X]$

## ☰ Définition 2.2.0.3

Soit  $A$  un anneau intègre commutatif. On peut construire le corps de fractions de l'anneau  $A[X]$ , qui est noté  $\mathbb{K}(X)$  et appelé **corps des fractions de l'anneau  $A[X]$** .

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q} \text{ tel que } P, Q \in A[X], Q \neq 0 \right\}$$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est un corps commutatif, avec les lois d'addition et de multiplication définies de manière similaire à celles de  $\mathbb{K}$  (en utilisant les opérations sur les polynômes).

## 2.1 Degré d'une fraction rationnelle

### ✔ Propriété 2.2.1.5

Soient  $(N, D), (N_1, D_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$ .

Si  $\frac{N}{D} = \frac{N_1}{D_1}$ , alors :  $N \cdot D_1 = N_1 \cdot D$ .

On a donc une égalité de deux polynômes, et on peut comparer leurs degrés. En particulier, on a  $\deg(N) + \deg(D_1) = \deg(N_1) + \deg(D)$ , ce qui implique que :

$$\deg(N) - \deg(D) = \deg(N_1) - \deg(D_1)$$

Cela veut dire que  $\deg(N) - \deg(D)$  est une quantité qui ne dépend pas du représentant choisi pour cette fraction rationnelle.

### ☰ Définition 2.2.1.4 (*Degré d'une fraction rationnelle*)

On définit le **degré d'une fraction rationnelle**  $\frac{N}{D}$  par :

$$\deg\left(\frac{N}{D}\right) = \deg(N) - \deg(D)$$

On le note  $\deg\left(\frac{N}{D}\right)$  ou  $d^\circ\left(\frac{N}{D}\right)$ .

● **Remarque 2.2.1.3 (Valeur du degré d'une fraction rationnelle)**

Pour toute fraction  $F \in \mathbb{K}(X)$ , on a  $\deg(F) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

avec  $\deg(F) = \deg\left(\frac{N}{D}\right) = -\infty$  si et seulement si  $F = 0_{\mathbb{K}(X)}$ , donc si et seulement si  $N = 0_{\mathbb{K}[X]}$  (en posant  $F = \frac{N}{D}$  avec  $N, D \in \mathbb{K}[X]$  et  $D \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ ).

En effet,  $\deg(F) = \underbrace{\deg(N)}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} - \underbrace{\deg(D)}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ .

● **Remarque 2.2.1.4 (Degré d'un polynôme vu comme une fraction rationnelle)**

Si  $P \in \mathbb{K}[X]^*$ , alors  $\deg(P) \in \mathbb{N}$ .

**La réciproque est fautive :** On ne peut pas écrire ( $F \in \mathbb{K}(X)$  et  $\deg(F) \in \mathbb{N}$ )  $\implies F \in \mathbb{K}[X]$ . On peut donner comme contre-exemple la fraction rationnelle  $F = \frac{X^2}{X+1} \in \mathbb{K}(X)$ , qui est une fraction rationnelle de degré 1 (car  $\deg(X^2) - \deg(X+1) = 2 - 1 = 1$ ), mais qui n'est pas un polynôme (car il n'est pas de la forme  $\frac{P}{1}$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$ ).

● **Remarque 2.2.1.5 (Division de polynômes et appartenance à  $\mathbb{K}[X]$ )**

Pour  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ , on a :

$$F \in \mathbb{K}[X] \iff B \mid A$$

✓ **Propriété 2.2.1.6**

Soient  $F, G \in \mathbb{K}(X)$ . Alors :

$$\deg(F \cdot G) = \deg(F) + \deg(G)$$

$$\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)) \text{ avec égalité si } \deg(F) \neq \deg(G)$$

🔍 **Preuve**

1. La première égalité est vérifiée trivialement, en effet :

$$\begin{aligned}
\deg(F \cdot G) &= \deg\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \\
&= \deg\left(\frac{AC}{BD}\right) \\
&= \deg(AC) - \deg(BD) \\
&= (\deg(A) + \deg(C)) - (\deg(B) + \deg(D)) \\
&= (\deg(A) - \deg(B)) + (\deg(C) - \deg(D)) \\
&= \deg(F) + \deg(G)
\end{aligned}$$

2. Pour démontrer la seconde inégalité, on pose  $F = \frac{A}{D}$  et  $G = \frac{B}{D}$  (on suppose que les fractions sont écrites avec un dénominateur commun, ce qui est toujours possible). Alors :  $F + G = \frac{A+B}{D}$ , et  $\deg(F + G) = \deg(A + B) - \deg(D)$ . Or,  $\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$  (propriété issue des polynômes!), ce qui implique que  $\deg(F + G) \leq \max(\deg(A), \deg(B)) - \deg(D) = \max(\underbrace{\deg(A) - \deg(D)}_{\text{degré de fraction}}, \underbrace{\deg(B) - \deg(D)}_{\text{degré de fraction}}) = \max(\deg(F), \deg(G))$ .
- Ensuite, on démontre facilement l'égalité dans le cas où  $\deg(F) \neq \deg(G)$ . ■

## 2.2 Fraction dérivée

### ✓ Propriété 2.2.2.7

Soit  $F = \frac{N}{D}$ .

La fraction  $\frac{N'D - ND'}{D^2}$  ne dépend pas du représentant choisi pour  $F$ .

### 📖 Définition 2.2.2.5 (Fraction dérivée)

On définit la **fraction dérivée** de  $F$  par :

$$F' = \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

Par convention,  $F^{(0)} = F$ .

On peut aussi définir, par récurrence, les dérivées successives de  $F$  par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, F^{(k+1)} = (F^{(k)})'$$

### Q Preuve

Soit  $F = \frac{N}{D} = \frac{A}{B} \iff NB = AD$ .

Nous voulons montrer que  $\frac{N'D - ND'}{D^2} = \frac{A'B - AB'}{B^2} \iff D^2(A'B - AB') = B^2(N'D - ND')$ .

► Dans le sens direct  $\implies$  :

- ▷ On a  $N'B + NB' = A'D + AD'$  (en dérivant l'égalité  $NB = AD$ ).
- ▷ Et on a aussi  $D^2(A'B - AB') = A'D \cdot DB - AD^2B$  et  $B^2(N'D - ND') = N'B \cdot BD - NB^2D$ .
- ▷ En combinant ces égalités, on trouve que  $D^2(A'B - AB') = B^2(N'D - ND')$ .

► Dans le sens inverse  $\impliedby$ , la démonstration est plus simple, on peut directement utiliser les égalités  $D^2(A'B - AB') = B^2(N'D - ND')$  et  $NB = AD$  pour trouver que  $N'B + NB' = A'D + AD'$ . ■

### ● Remarque 2.2.2.6 (Degré de la fraction dérivée)

Soit  $F = \frac{A}{B}$  avec  $\deg(A), \deg(B) \geq 1$ .

$$\deg(F') \leq \deg(F) - 1$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \deg(F') &= \deg\left(\frac{A'B - AB'}{B^2}\right) \\ &= \deg(A'B - AB') - \deg(B^2) \\ &\leq \max(\deg(A'B), \deg(AB')) - 2\deg(B) \\ &\leq \max(\deg(A') + \deg(B), \deg(A) + \deg(B')) - 2\deg(B) \\ &\leq \max((\deg(A) - 1) + \deg(B), \deg(A) + (\deg(B) - 1)) - 2\deg(B) \\ &\leq \max(\deg(A) + \deg(B) - 1, \deg(A) + \deg(B) - 1) - 2\deg(B) \\ &\leq \deg(A) + \deg(B) - 1 - 2\deg(B) \\ &\leq \deg(A) - \deg(B) - 1 \\ &\leq \deg(F) - 1 \end{aligned}$$

### ✎ Exemple 2.2.2.2

$$F = \frac{X}{X+1} \implies \deg F = 0.$$

$$\text{et } F' = \frac{1}{(X+1)^2} \implies \deg F' = -2$$

### ✓ Propriété 2.2.2.8

Soient  $F_1, F_2 \in \mathbb{K}(X)$ . Alors :

1.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (F_1 + \lambda F_2)' = F_1' + \lambda F_2'$

$$2. (F_1 \cdot F_2)' = F_1' \cdot F_2 + F_1 \cdot F_2'$$

### Q Preuve

1. Pour démontrer la première propriété, on peut utiliser le fait que  $\mathbb{K}(X)$  est un corps (et techniquement, un sous-espace vectoriel), et considérer  $\lambda \in \mathbb{K}$  comme un polynôme de degré 0.
2. La démonstration est triviale, on procède par calcul direct. ■

## 2.3 Zéros et pôles d'une fraction rationnelle

### 📖 Définition 2.2.3.6 (Zéros et pôles d'une fraction rationnelle)

Soit  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ , avec  $A \wedge B = 1$  (c'est à dire que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux).

- ▶ On dit que  $\alpha$  est **zéro** (ou racine) de  $F$  de multiplicité  $s$  lorsque  $\alpha$  est une racine de  $A$  (le *numérateur*) de multiplicité  $s$ .
- ▶ On dit que  $\beta$  est **pôle** de  $F$  de multiplicité  $t$  lorsque  $\beta$  est une racine de  $B$  (le *dénominateur*) de multiplicité  $t$ .

### ⚠ Attention

Attention, les zéros et les pôles d'une fraction rationnelle sont définis si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux. En effet, si  $A$  et  $B$  ont un facteur commun, alors on peut simplifier la fraction rationnelle, ce qui peut faire disparaître certains zéros ou pôles. Par exemple, si  $F = \frac{(X-1)(X-2)}{X^2-1} = \frac{(X-1)(X-2)}{(X-1)(X+1)}$ , alors  $F$  peut être simplifié en  $\frac{X-2}{X+1}$ , ce qui fait "disparaître" le zéro/pôle 1.

### ✎ Exemple 2.2.3.3

Soit  $F = \frac{X^2-3X+2}{(X^3-1)((X+1)^2)}$ .

On peut simplifier  $F$  en  $\frac{X-2}{(X^2+X+1)(X+1)^2}$ .

- ▶ 2 est dit **zéro simple** de  $F$  (car 2 est une racine simple du numérateur),
- ▶  $-1$  est dit **pôle double** de  $F$  (car  $-1$  est une racine double du dénominateur),
- ▶ les racines complexes de  $X^2+X+1$  sont des **pôles simples** de  $F$  (car les racines de  $X^2+X+1$  sont des racines simples du dénominateur).

**☰ Définition 2.2.3.7 (Fonction rationnelle)**

Soit  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ , avec  $A \wedge B = 1$ .

On définit la **fonction rationnelle** associée à  $F$  par :

$$\tilde{F} : \begin{array}{l} \mathbb{K} \setminus \{\text{ensemble des pôles de } F\} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \tilde{F}(x) = \frac{A(x)}{B(x)} \end{array}$$

On peut noter l'ensemble des pôles de  $F$  par  $\mathcal{D}$ . Alors,  $\tilde{F}$  est une fonction définie sur  $\mathbb{K} \setminus \mathcal{D}$ .

# 3 Décomposition en éléments simples (DES) d'une fraction rationnelle

## 3.1 Généralités

### ★ Théorème 3.3.1.2 (Forme irréductible d'une fraction rationnelle)

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Alors, il existe un unique couple  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $A \wedge B = 1$ ,  $B$  est unitaire et  $F = \frac{A}{B}$ .

#### Q Preuve

Soit  $F = \frac{N}{D} \in \mathbb{K}(X)$ .

- ▶ **Existence** : On peut trouver un couple  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $A \wedge B = 1$ ,  $B$  est unitaire et  $\frac{A}{B} = \frac{N}{D}$ .
  - ▷ Montrons que  $F$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{A}{B}$  avec  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  et  $B$  unitaire.
    - On sait que  $D$  admet un coefficient dominant non nul, disons  $d$ , car  $D \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ .
    - On pose  $N_1 = d^{-1} \cdot N$  et  $D_1 = d^{-1} \cdot D$ . Alors,  $N_1$  et  $D_1$  sont des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  avec  $D_1$  unitaire
  - ▷ On a alors :  $\frac{N_1}{D_1} = \frac{N}{D}$ .
    - On peut se permettre d'écrire  $F = \frac{N_1}{D_1}$  car ils agissent comme d'autres représentants de cette classe d'équivalence.
- ▶ Montrons qu'on peut écrire  $F$  sous la forme  $\frac{A}{B}$  avec  $A, B \in \mathbb{K}[X]$ ,  $A \wedge B = 1$ ,  $B$  unitaire et  $\text{CD}(B) = 1$ .
  - ▷ Soit  $C = N_1 \wedge D_1$ .
  - ▷ Alors il existe un couple  $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $N_1 = CA$  et  $D_1 = CB$ .
  - ▷ Donc  $F = \frac{A}{B}$  avec  $A \wedge B = 1$  et  $\text{CD}(B) = 1$ , sachant que  $D_1$  et  $C$  sont unitaires.
- ▶ **Unicité** : Supposons que  $F$  puisse s'écrire sous la forme  $\frac{A}{B}$  et  $\frac{A'}{B'}$  avec  $A, B, A', B' \in \mathbb{K}[X]$ ,  $A \wedge B = 1$ ,  $A' \wedge B' = 1$ ,  $B$  unitaire et  $B'$  unitaire. Alors, on a :

- ▷  $A'B = AB'$  (en utilisant l'égalité  $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ ).
- ▷ Comme  $B \mid A'B$ , alors en utilisant le théorème de Gauss, on trouve que  $B \mid B'$ . De même,  $B' \mid AB'$ , donc  $B' \mid B$  (sachant que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux).
- ▷ Ainsi,  $B$  et  $B'$  sont deux polynômes qui divisent mutuellement l'un l'autre, ils sont donc associés à un élément unitaire près. Mais comme ils sont déjà unitaires, alors  $B = B'$ .

■

### ☰ Définition 3.3.1.8 (Élément simple)

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ .

On dit que  $F$  est un **élément simple** lorsque  $F$  est un monôme, c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme  $F = \alpha \cdot X^k$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

ou bien lorsque :

- ▶ il existe...
  - ▷  $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ .
  - ▷  $P \in \mathbb{K}[X]$  irréductible.
  - ▷  $n \in \mathbb{N}^*$
- ▶ tels que  $F = \frac{A}{P^n}$ , avec  $\deg(A) < \deg(P)$  (!).

### 🗨 Remarque 3.3.1.7

- ▶ Les éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$  sont :
  - ▷ les monômes de la forme  $\alpha X^k$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,
  - ▷ ainsi que les fractions de la forme  $\frac{\lambda}{(X-\alpha)^n}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , qu'on appelle des éléments simples de 1<sup>ère</sup> espèce.
- ▶ Les éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  sont :
  - ▷ les monômes de la forme  $\alpha X^k$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,
  - ▷ les éléments simples de 1<sup>ère</sup> espèce de la forme  $\frac{\lambda}{(X-\alpha)^n}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,
  - ▷ les éléments simples de 2<sup>ème</sup> espèce de la forme  $\frac{\lambda X + \mu}{(X^2 + aX + b)^n}$  avec  $\lambda, \mu, a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $b^2 - 4a < 0$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### ✔ Propriété 3.3.1.9 (Partie entière et partie fractionnaire)

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ . Alors, il existe un unique couple  $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$  tel que :

$$\begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

$E$  est appelé la partie entière de  $F$ , et  $G$  est appelé la partie fractionnaire de  $F$ .

**Q Preuve**

On pose  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$  avec  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  et  $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ .

On effectue la division euclidienne de  $A$  par  $B$ , ce qui nous donne un quotient  $E \in \mathbb{K}[X]$  et un reste  $R \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $A = EB + R$  avec  $\deg(R) < \deg(B)$ .

Donc  $F = \frac{EB+R}{B} = E + \frac{R}{B}$ .

L'existence du couple  $(E, G)$  est ainsi démontrée en posant  $G = \frac{R}{B}$ . L'unicité est démontrée implicitement, car le quotient et le reste de la division euclidienne sont uniques. ■

**Remarque 3.3.1.8**

Si  $F \in \mathbb{K}(X)$  avec  $\deg(F) < 0$ , alors  $F$  est égal à sa partie fractionnaire  $F = G$ , et sa partie entière est nulle  $E = 0$  (par unicité de ces deux parties...).

## 3.2 Décomposition en éléments simples (cas général)

On va préparer une généralisation du théorème de décomposition en éléments simples (DES) pour les fractions rationnelles à coefficients dans un corps quelconque  $\mathbb{K}$  en se basant sur deux propriétés :

**✓ Propriété 3.3.2.10**

Soient  $A$  et  $B_1, \dots, B_n \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $B_i$  et  $B_j$  sont deux à deux premiers entre eux.

On pose  $F = \frac{A}{B_1 \dots B_n}$  avec  $\deg(F) < 0$ .

Alors...

$$\exists!(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{K}[X]^n \text{ tels que } F = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{B_i} \text{ et } \underbrace{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(A_i) < \deg(B_i)}_{\text{condition importante}}$$

**Q Preuve**

La démonstration de cette propriété se fait par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le cas de base  $n = 1$  est trivial, mais le cas  $n = 2$  est plus utile est plus intéressant à démontrer. Il faut y employer le théorème de Bézout et décomposer le numérateur  $A$  en  $A \cdot 1$  puis en  $A \cdot (B_1u + B_2v)$ , ce qui permet de trouver les éléments  $A_1$  et  $A_2$  de la décomposition.

La preuve a été faite en tant qu'exercice hors-classe. Il ne faut pas oublier de démontrer l'existence (via division euclidienne et en considérant la somme des quotients comme une partie entière de la fraction) et l'unicité (en considérant un autre couple vérifiant les mêmes propriétés, et/ou par absurde) de la décomposition pendant l'initialisation de la récurrence, dans le cas où  $n = 2$ . L'hérédité devient ensuite triviale, en recyclant tout simplement la démonstration du cas de base  $n = 2$ .

*L'unicité ne peut pas être démontrée par la division euclidienne parce qu'elle dépend des constantes  $U$  et  $V$  de Bézout, qui ne sont pas uniques.* ■

#### Exemple 3.3.2.4

$$F = \frac{X^2}{(X-1)(X^2+1)} \in \mathbb{R}(X).$$

On a donc  $F = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Pour déterminer les constantes  $a, b, c$ , il n'y a pas besoin d'aboutir à un système d'équations (même si cette méthode marche). Il suffit tout simplement de multiplier l'égalité par  $(X-1)$  et d'évaluer l'égalité à  $X = 1$  pour trouver  $a = \frac{1}{2}$ . Ensuite, on peut multiplier l'égalité par  $X^2 + 1$  et évaluer à  $X = i$  pour trouver  $b = c = \frac{1}{2}$ .

Au final,  $F = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X-1} + \frac{X+1}{X^2+1} \right)$ .

#### Propriété 3.3.2.11

Soit  $F = \frac{A}{B^n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\deg(F) < 0$ .

Alors  $\exists!(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{K}[X]^n$  tel que  $F = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{B^k}$  et  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(A_k) < \deg(B)$

#### Preuve

La preuve se fait par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le cas de base  $n = 1$  est trivial. L'hérédité se fait en utilisant la division euclidienne pour trouver un quotient  $Q$  et un reste  $R$  tels que  $A = QB + A_{n+1}$  avec  $\deg(R) < \deg(B)$ , ce qui permet d'écrire  $F = \frac{Q}{B^n} + \frac{A_{n+1}}{B^{n+1}}$ , et de conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence sur la fraction  $\frac{Q}{B^{n-1}}$ . ■

#### Exemple 3.3.2.5

$$F = \frac{X^5 - 3X^4 + 2X^2 + 2}{(X^2+1)^3} \in \mathbb{R}(X).$$

Pour décomposer cette fraction, on peut utiliser deux méthodes. Comme le degré de  $F$  est négatif, on peut l'écrire sous la forme d'une somme de la forme  $\frac{A_k}{B^k}$ , puis multiplier par le dénominateur afin d'aboutir ensuite à un système de six équations à six inconnues, dont la résolution sera (évidemment) assez laborieuse.

Cependant, la deuxième méthode, plus rapide, est exactement analogue à celle qui a été utilisée dans la preuve. On pose  $A = X^5 - 3X^4 + 2X^2 + 2$ , et on décompose  $F = \frac{A_1}{(X^2+1)} + \frac{A_2}{(X^2+1)^2} + \frac{A_3}{(X^2+1)^3}$ , avec  $\deg(A_k) < 2$  pour  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

On effectue ensuite la division euclidienne de  $A$  par  $X^2 + 1$  pour trouver un quotient  $Q$  et un reste  $R$  tels que  $A = Q(X^2 + 1) + R$  avec  $\deg(R) < 2$ . On trouve alors  $Q = X^3 - 3X^2 - X + 5$  et  $R = X - 3$ . Par conséquent,  $F = \frac{Q}{(X^2+1)^2} + \frac{R}{(X^2+1)^3}$ .

Ensuite, on effectue la division euclidienne de  $Q$  par  $X^2 + 1$  pour trouver un quotient  $Q_1$  et un reste  $R_1$  tels que  $Q = Q_1(X^2 + 1) + R_1$  avec  $\deg(R_1) < 2$ . On trouve alors  $Q_1 = X - 3$  et  $R_1 = -2X + 8$ . Par conséquent,  $F = \frac{Q_1}{(X^2+1)} + \frac{R_1}{(X^2+1)^2} + \frac{R}{(X^2+1)^3}$ .

★ **Théorème 3.3.2.3 (D.E.S. d'une fraction rationnelle)**

Soit  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$  et  $A \wedge B = 1$  et  $B$  unitaire.

On écrit  $B = \prod_{i=1}^r B_i^{\alpha_i}$  avec  $\alpha_i \geq 1$  et  $(B_i)_{1 \leq i \leq r}$  irréductibles deux à deux distincts.

Alors, il existe un unique  $E \in \mathbb{K}[X]$  et une unique famille  $(A_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, r \rrbracket}}$  d'éléments de

$\mathbb{K}[X]$  tels que :

$$F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{B_i^j} \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket, \deg(A_{i,j}) < \deg(B_i)$$

Q **Preuve**

Nous utilisons d'abord la division euclidienne de  $A$  par  $B$  pour trouver un quotient  $E$  et un reste  $R$  tels que  $A = EB + R$  avec  $\deg(R) < \deg(B)$ . Par conséquent,  $F = E + \frac{R}{B}$ , qui reste une fraction de degré négatif.

Ensuite, on utilise la première propriété pour trouver des éléments  $A_{i,1}$  tels que  $\frac{R}{B} = \sum_{i=1}^r \frac{A_{i,1}}{B_i}$  avec  $\deg(A_{i,1}) < \deg(B_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , sachant que  $B$  peut être décomposé en un produit  $\prod_{i=1}^r B_i^{\alpha_i}$  avec  $\deg(\frac{A_{i,k}}{B_i^{\alpha_k}}) < 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

$$\frac{R}{\prod_{i=1}^r B_i^{\alpha_i}} = \sum_{i=1}^r \frac{A_{i,1}}{B_i^{\alpha_i}}$$

Ensuite, on utilise la seconde propriété pour trouver des éléments  $A_{i,j}$  tels que  $\frac{A_{i,1}}{B_i} = \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{B_i^j}$  avec  $\deg(A_{i,j}) < \deg(B_i)$  pour tout  $j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket$  et tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ .

En combinant toutes ces égalités, on trouve que  $F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{B_i^j}$  avec les conditions de degrés sur les  $A_{i,j}$ . ■

⚡ **Exercice 3.3.2.1**

Décomposer une fraction rationnelle générale dans  $\mathbb{C}(X)$  puis dans  $\mathbb{R}(X)$  en éléments simples.

**Solution :**

Dans  $\mathbb{C}(X)$ , nous allons poser  $F = \frac{A}{B}$  avec  $A, B \in \mathbb{C}[X]$ ,  $A \wedge B = 1$ ,  $B$  unitaire et  $\deg(F) < 0$ .

- On factorise le dénominateur  $B$  en produit de facteurs irréductibles deux à deux distincts, c'est à dire  $B = \prod_{i=1}^r (X - x_i)^{\alpha_i}$  avec  $\alpha_i \geq 1$  et  $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ .

- ▶ Ensuite, on utilise le théorème de D.E.S. pour trouver un unique élément  $E \in \mathbb{C}[X]$  et une famille unique  $(A_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, r \rrbracket}}$  d'éléments de  $\mathbb{C}[X]$  tels que  $F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{B_i^j}$  avec  $\deg(A_{i,j}) < \deg(B_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et tout  $j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket$ .

Dans  $\mathbb{R}(X)$ , la démarche est exactement la même, à la différence que les facteurs irréductibles de  $B$  sont soit des polynômes du premier degré (ayant une racine réelle), soit des polynômes du second degré (ayant des racines complexes conjuguées).

- ▶ On factorise le dénominateur  $B$  en produit de facteurs irréductibles deux à deux distincts, c'est à dire  $B = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + a_j X + b_j)^{\beta_j}$  avec  $\alpha_i, a_j, b_j \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_i$  distincts,  $a_j^2 - 4b_j < 0$  et  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ .
- ▶ Ensuite, on utilise le théorème de D.E.S. pour trouver un unique élément  $E \in \mathbb{R}[X]$  et une famille unique  $(A_{i,j})_{\substack{j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket \\ i \in \llbracket 1, r \rrbracket}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}[X]$  et une famille unique  $(B_{k,l})_{\substack{l \in \llbracket 1, \beta_k \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, s \rrbracket}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}[X]$  tels que  $F = E + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{(X - \alpha_i)^j} + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^{\beta_k} \frac{B_{k,l}}{(X^2 + a_k X + b_k)^l}$  avec  $\deg(A_{i,j}) < 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et tout  $j \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket$ , et  $\deg(B_{k,l}) < 2$  pour tout  $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$  et tout  $l \in \llbracket 1, \beta_k \rrbracket$ .
- ▶ On peut aussi utiliser le

recop

## 3.3 Techniques de décomposition en éléments simples

### 3.3.1 Méthode par pôles simples

#### ✓ Propriété 3.3.3.12

Soit  $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$  avec  $A \wedge B = 1$  et  $B = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$  où les  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont deux à deux distincts.

Alors,  $F$  peut être décomposée de la manière suivante :

$$F = E + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

avec  $E \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Alors  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\lambda_k = \frac{A(a_k)}{B'(a_k)}$ .

(On peut se permettre de "diviser" par  $B'(a_k)$  (en travaillant dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) car  $B'(a_k) \neq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , étant donné que les  $a_i$  sont deux à deux distincts, ce qui implique que  $B$  n'admet pas de racine multiple (ne possède que des racines simples), et donc que  $B'(a_k) \neq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ).

 **Preuve**

recop



 **Exemple 3.3.3.6**

- Décomposons la fraction rationnelle  $F = \frac{1}{X^n - 1}$  dans  $\mathbb{C}(X)$  où  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .
- ▷ On pose  $B = X^n - 1$ .
  - ▷  $B$  peut s'écrire comme le produit  $\prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$  où  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  est une racine primitive  $n$ -ième de l'unité.
  - ▷ Comme la partie entière de  $F$  est nulle parce que son degré est strictement négatif, on peut écrire  $F$  sous la forme  $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega^k}$  avec  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .
  - ▷ En utilisant la propriété précédente, on trouve que  $\lambda_k = \frac{1}{B'(\omega^k)}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .
  - ▷ En calculant  $B'(\omega^k)$ , on trouve que  $B'(\omega^k) = n \cdot \omega^{k(n-1)}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .
  - ▷ Donc  $\frac{1}{B'(\omega^k)} = \frac{1}{n \cdot \omega^{k(n-1)}}$ , qu'on pourra simplifier en  $\frac{\omega^k}{n}$  (sans perte de généralité) pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ .
  - ▷ Par conséquent,  $F = \frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{n(X - \omega^k)}$ .
  - ▷ On peut aussi la réécrire en considérant un nouveau  $\omega \in \mathbb{U}_n$ , ce qui nous donne :

$$F = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}$$

- Calculons  $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$  via une décomposition en éléments simples.
- ▷ On pose  $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$ .
  - ▷ On a  $F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
  - ▷ En multipliant l'égalité par  $X$  et en évaluant à  $X = 0$ , on trouve que  $a = \frac{1}{2}$ .
  - ▷ En multipliant l'égalité par  $X + 1$  et en évaluant à  $X = -1$ , on trouve que  $b = -1$ .
  - ▷ En multipliant l'égalité par  $X + 2$  et en évaluant à  $X = -2$ , on trouve que  $c = \frac{1}{2}$ .
  - ▷ Par conséquent,  $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X} - 1 \cdot \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{X+2}$ .
  - ▷ L'intégration devient alors triviale.

## 3.4 Méthode par pôles doubles

### ✓ Propriété 3.3.4.13

Soit  $F = \frac{A}{B}$  avec  $A \wedge B = 1$  et  $B = (X - a)^2 \cdot Q$  avec  $Q(a) \neq 0$  et  $a \in \mathbb{K}$ . Alors,  $F$  peut être décomposée de la manière suivante :

$$F = E + \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2} + \frac{A_1}{Q}$$

avec  $\deg(A_1) < \deg(Q)$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ .

$$\text{Et on a } \begin{cases} \beta = \frac{A(a)}{Q(a)} \\ \alpha = \left(\frac{A}{Q}\right)'(a) \end{cases}$$

### 🔍 Preuve

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{(X - a)^2 \cdot Q} \\ &= E + \frac{\alpha}{X - a} + \frac{\beta}{(X - a)^2} + \frac{A_1}{Q} \\ (X - a)^2 \cdot F &= \frac{A}{Q} \\ &= (X - a)^2 \left(E + \frac{A_1}{Q}\right) + \alpha(X - a) + \beta \\ \implies [(X - a)^2 \cdot F]_{X=a} &= \frac{A(a)}{Q(a)} = \beta \\ \implies \left(\frac{A}{Q}\right)' &= (X - a) \left[2\left(E + \frac{A_1}{Q}\right) + (X - a) \cdot \left(E + \frac{A_1}{Q}\right)'\right] + \alpha \\ \text{donc } \left(\frac{A}{Q}\right)'(a) &= \alpha \\ B = (X - a)^2 \cdot Q &\implies B'' = 2Q + 4(X - a)Q' + (X - a)^2Q'' \implies B''(a) = 2Q(a) \neq 0 \\ \implies \beta &= \frac{2A(a)}{B''(a)} \end{aligned}$$

### 📌 Exemple 3.3.4.7

Décomposons  $F = \frac{X}{(X-1)^2(X-2)}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .

On remarque très clairement que le " $\frac{A}{Q}$ " dans cet exemple est le  $\frac{X}{X-2}$ .

On a  $F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-2}$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

En utilisant la même méthode que celle qui a été employée précédemment (multiplication de  $F$  par... et évaluations aux racines...) on trouve que :

$$\begin{cases} [(X-2)F]_{X=2} = c = 2 \\ [(X-1)^2F]_{X=1} = b = -1 \\ \left(\frac{X}{X-2}\right)'(1) = a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On peut aussi trouver  $a$  en multipliant  $F$  par  $X$  et en évaluant à  $X \rightarrow \infty$ , mais cela marche dans ce cas seulement parce que le degré de  $F$  est négatif (pas forcément strictement négatif).

### 3.4.1 Pôles de multiplicité supérieure ou égale à 3

#### Cas particulier

Soit  $F = \frac{P}{(X-a)^s}$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $a \in \mathbb{K}$  et  $s \in \mathbb{N}^* \mid s \geq 3$ .

D'après la formule de Taylor, on a  $P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a) \cdot \frac{(X-a)^k}{k!}$ .

- ▶ Si  $n < s$ , alors  $F = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{1}{(X-a)^{s-k}}$ .
- ▶ Si  $n \geq s$ , alors  $F = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{1}{(X-a)^{s-k}} + \underbrace{\sum_{k=s}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \cdot (X-a)^{k-s}}_{\text{partie entière}}$ .

#### Exemple 3.3.4.8

Décomposons  $F = \frac{X^5}{(X-1)^4}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .

L'idée consiste à tout simplement rajouter et retrancher 1 et appliquer la formule du binôme de Newton.

On a  $X^5 = (X-1+1)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (X-1)^k$ .

En réintégrant dans l'expression de  $F$ , on trouve :

$$\begin{aligned} F &= (X-1) + 5 + \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} \cdot \frac{1}{(X-1)^{4-k}} \\ \implies F &= (X+4) + \sum_{j=1}^4 \binom{5}{4-j} \cdot \frac{1}{(X-1)^j} \end{aligned}$$

C'est une décomposition en éléments simples de  $F$ .

**Cas général**

$F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$  avec  $A \wedge B = 1$  et  $B = (X - a)^s \cdot Q$  avec  $Q(a) \neq 0$  et  $a \in \mathbb{K}$ ,  $s \geq 3$ .

On définit la fonction rationnelle  $f : x \mapsto \frac{A(x)}{Q(x)}$ .

Comme  $Q(a) \neq 0$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  dans un voisinage de  $a$ , et on peut donc effectuer un développement limité  $DL_n(a)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  de  $f$  au voisinage de  $a$ .

Et en particulier, pour  $n = s - 1$ , on trouve que  $f(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_k (x - a)^k + \underset{x \rightarrow a}{o}((x - a)^{s-1})$  avec  $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, s - 1 \rrbracket$ .

Par conséquent,  $F(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^s} = \sum_{k=0}^{s-1} \alpha_k \cdot \frac{1}{(x-a)^{s-k}} + \underset{x \rightarrow a}{o}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ .

Donc  $F(x) = \sum_{j=1}^s \alpha_{s-j} \cdot \frac{1}{(x-a)^j} + \underset{x \rightarrow a}{o}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ .

Or  $F = E + \sum_{j=1}^s \frac{\lambda_j}{(x-a)^j} + \frac{A_1}{Q}$  avec  $E \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda_j \in \mathbb{K}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$  et  $\deg(A_1) < \deg(Q)$ .

i.e.  $F(x) = \sum_{j=1}^s \frac{\lambda_j}{(x-a)^j} + \underset{x \rightarrow a}{o}\left(\frac{1}{x-a}\right) + (E(x) + \frac{A_1(x)}{Q(x)})$ .

On a  $(x - a)(E(x) + \frac{A_1(x)}{Q(x)}) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow a$ , ce qui signifie que :

$F(x) = \sum_{j=1}^s \frac{\lambda_j}{(x-a)^j} + \underset{x \rightarrow a}{o}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ .

Par conséquent, par unicité du développement limité d'ordre  $s - 1$  de  $f$  au voisinage de  $a$  ( $DL_{s-1}(a)$ ), on trouve que  $\lambda_j = \alpha_{s-j}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , qui sont des constantes qu'on connaît et qui sont égales à  $\frac{f^{(s-j)}(a)}{(s-j)!}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ .

---

Fin du Chapitre XIII.

---